

- (1) Rozhodněte o následujících funkcích, zda jsou nebo nejsou charakteristickými funkcemi nějakých náhodných veličin a své tvrzení stručně a plně zdůvodněte:

(a) $f_1(t) = \frac{1}{3(1+t^2)} + \frac{1}{4-\cos(t)} + \frac{1}{3} e^{-|t|-t^2+it+\cos(t)-1}$

(b) $f_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} |\cos(t^2)| e^{it}$

(c) $f_3(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos(\sqrt{|t|})$

(d) $f_4(t) = \frac{1}{5-e^{-|t|}} + \frac{\sin t}{2t} + \frac{1}{4} \frac{1}{1+t^2}$

(e) $f_5(t) = \frac{1}{2} + \frac{e^{it}}{2} \frac{1+t}{1+t^2}$.

- (2) Buďte $X_n, n \in \mathbb{N}$ nezávislé náhodné veličiny, přičemž pro $n \in \mathbb{N}$ veličina X_n má exponenciální rozdělení se střední hodnotou \sqrt{n} .

- (a) Rozhodněte, zda je následující řada konvergentní skoro jistě

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} X_k^3.$$

- (b) Rozhodněte, zda následující posloupnost konverguje skoro jistě. Pokud ano, spočtěte příslušnou limitu

$$Y_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n X_k^2.$$

- (c) Rozhodněte, zda následující posloupnost konverguje v distribuci. Pokud ano, spočtěte příslušné limitní rozdělení

$$Z_n = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^n (X_k^2 - EX_k^2).$$

- (3) Reálné náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé a každá z nich má hustotou $f(x) = x^{-2} 1_{[x>1]}$. Spočtěte

(a) $E\left[\frac{1}{\max\{X, Y\}} \mid \min\{X, Y\}\right],$

(b) $E\left[\frac{1}{\max\{X, Y\}} \mid \min\{X, Y\} > 2\right].$